PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

Facultad de Física
Instituto de Física

Tarea 4

Relatividad y Gravitación

Profesor: Máximo Bañados

Ayudante: Cristóbal Armaza (cyarmaza@uc.cl)

- Puede desarrollar sus respuestas a mano o en formato digital.
- **Plazo de entrega: 17 de noviembre durante la cátedra.**
- Una tarea ordenada hace a un corrector feliz.

Problemas a resolver

Problema 1. Una nave orbita circularmente una estrella de masa M sin encender sus motores. La nave se encuentra a una coordenada radial $r = 7M$.

(a) ¿Cuál es el período de la órbita medido en coordenadas de Schwarschild?

(b) ¿Cuál es el período de la órbita medido por un reloj a bordo?

Para este problema conviene mostrar primero que órbitas circulares en torno a una distribución esférica de masa M satisfacen la "tercera Ley de Kepler" $dt/d\phi = \sqrt{r^3/M}$.

Problema 2: redshift gravitacional. Considere dos observadores cerca de un planeta de masa M: uno *fijo* a una coordenada r_1, y otro cayendo libremente sobre una trayectoria que pasa por el observador fijo. Un fotón se dispara desde el planeta radialmente en la misma dirección del observador cayendo. La energía del fotón, medida muy lejos del planeta, es E_∞.

(a) ¿Cuál es la energía del fotón medida por el observador en reposo, cuando éste lo recibe?

(b) ¿Cuál es la energía del fotón medida por el observador cayendo libremente, cuando éste lo recibe?

(c) Considere ahora un tercer observador, situado en reposo justo sobre el primer observador, a un radio $r_2 > r_1$. ¿Qué fracción de la energía medida por el primer observador, recibe este tercer observador?

Problema 3. Considere la métrica en coordenadas "de Schwarschild" (t, r, ϕ),

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Encuentre las funciones $f(r)$ y $g(r)$ para que la métrica anterior sea solución de la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\ell^2} g_{\mu\nu},$$

con ℓ^2 constante.

Problema 4: agujero negro de Reissner-Nordström. Es posible generalizar la métrica en torno a un agujero negro de masa M cuando además posee carga Q. La métrica resultante es solución a la ecuación de campo de *Einstein-Maxwell* $G_{\mu\nu} = 8\pi T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}$, en donde $T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}$ es el tensor de flujo de momentum electromagnético, cuya forma explícita no será necesaria en este problema. El elemento de línea del espacio-tiempo fuera del agujero negro cargado resulta ser

$$ds^2 = -A\, dt^2 + A^{-1}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

en donde $A(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ (en unidades tradicionales, $Q^2 \to Q^2 G/4\pi\epsilon_0 c^4$, en donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío). Tal como en la geometría de Schwarzschild, en este espacio-tiempo partículas de prueba masivas (pero no cargadas) siguen geodésicas contenidas en un plano.

(a) Encuentre la frecuencia angular $d\phi/dt$ de órbitas circulares a una coordenada radial r dada.

(b) ¿Cuál es la frecuencia angular medida por un observador estacionario en r?